

Êtres mathématiques et êtres vivants

La partie mathématique du réel et la partie réelle des mathématiques

*François Sauvageot
Enseignant-Chercheur à l'Université Paris 7*

Math et biologie

- Le mariage entre la biologie et les mathématiques ne date pas d'hier et un des plus célèbres est la loi qui donne la fréquence des gènes dans une population à l'équilibre, due au mathématicien Hardy et au biologiste Weinberg.
- On pourrait également citer le mouvement Brownien étudié par le naturaliste Brown et qui est maintenant un des sujets les plus importants des mathématiques, mais aussi de la physique.

Dynamique des populations

- À partir du XVIIIe siècle, la population de l'ensemble de l'humanité a crû de façon constante. Alors est apparue la crainte, illustrée par l'oeuvre de Malthus, que la planète ne suffise pas à nourrir tous ses habitants.

Malthus

- Pour Malthus, la croissance de la population suit un loi géométrique tandis que celle des ressources est arithmétique.
- C'est-à-dire que d'une génération à l'autre, la population est multipliée par un facteur constant, sorte de bilan entre taux de fécondité et de mortalité, tandis que les ressources augmentent d'une même quantité à chaque génération.
- Ainsi pour lui la courbe démographique est une exponentielle ... et celle des ressources une droite.

Hypothèses de Malthus

- La reproduction est continue, c'est-à-dire non saisonnière.
- Tous les organismes sont identiques, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de structure d'âge.
- L'environnement est constant, et en particulier les ressources sont constantes.
- On peut l'utiliser par exemple en microbiologie, mais pas chez l'homme ...

Verhulst

- Le mathématicien belge Pierre-François Verhulst a introduit l'idée d'une compétition pour les ressources au sein d'une population.
- Son idée est que la croissance de la population est modérée par un facteur proportionnel au nombre de rencontres possibles entre les individus.
- Au bilan, l'accroissement de la population est égal à un terme proportionnel à la population auquel on retranche un terme proportionnel à son carré.

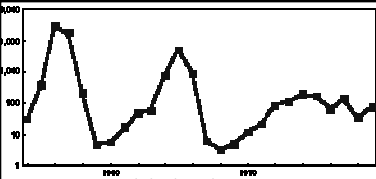
Modèle logistique

- Le modèle de Verhulst, ou modèle logistique s'applique en particulier pour les populations à forte interaction entre individus, comme la territorialité : les oiseaux, les plantes ... mais on peut aussi l'appliquer aux rongeurs.
- Selon que l'on pense aux populations comme des entités continues (en fonction du temps) ou discrète (regroupement par générations), on parle de modèle logistique continu ou discret.

Autres modèles

- Il existe de nombreux autres modèles, plus ou moins raffinés, pour expliquer les variations de la population.
- Comme toute modélisation, il faut garder à l'esprit la question que l'on tente de modéliser et les paramètres que l'on choisit.
- Il est facile de prédire la fin du monde avec presque n'importe quel modèle !

Une particularité du modèle logistique



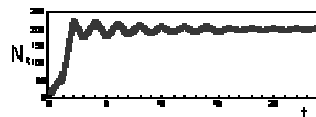
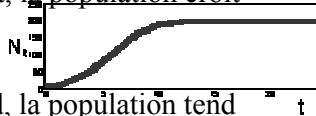
- Le biologiste **Robert May** a étudié cette suite en 1976, tandis que le physicien **Feigenbaum** (en 1975) et les mathématiciens **James A. Yorke** (en 1975) et **A.N. Sarkowski** (en 1964) trouvèrent chacun de leur côté des propriétés applicables à cette étude.
- En particulier, le modèle logistique discret conduit infailliblement à des oscillations de la taille de la population.

Continu vs discret

- Lorsqu'on étudie le modèle continu, l'effectif évolue vers ce qu'on pourrait appeler un effectif optimal.
- Par contre lorsque l'on utilise un modèle **discret** du type, on voit apparaître toute une dynamique inattendue.
- C'est Mitchell Feigenbaum, grâce à une calculatrice, vers 1970, qui découvre l'apparition du **chaos** dans ce système dynamique.
- Le modèle discret se révèle donc être plus riche que le modèle continu, et aussi plus réaliste : les biologistes observent souvent chez les animaux d'importantes variations d'effectifs d'une année sur l'autre.

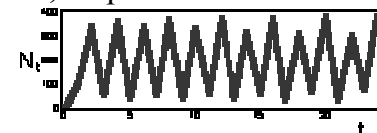
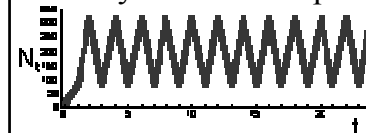
Premiers comportements

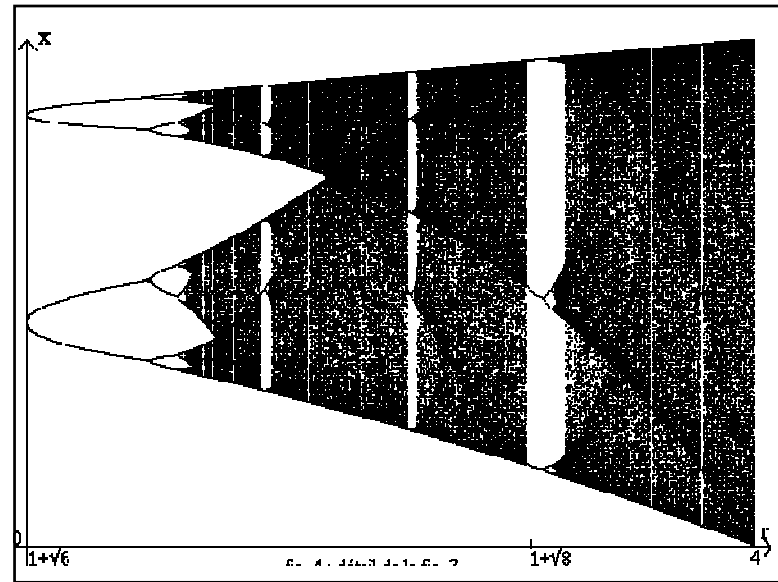
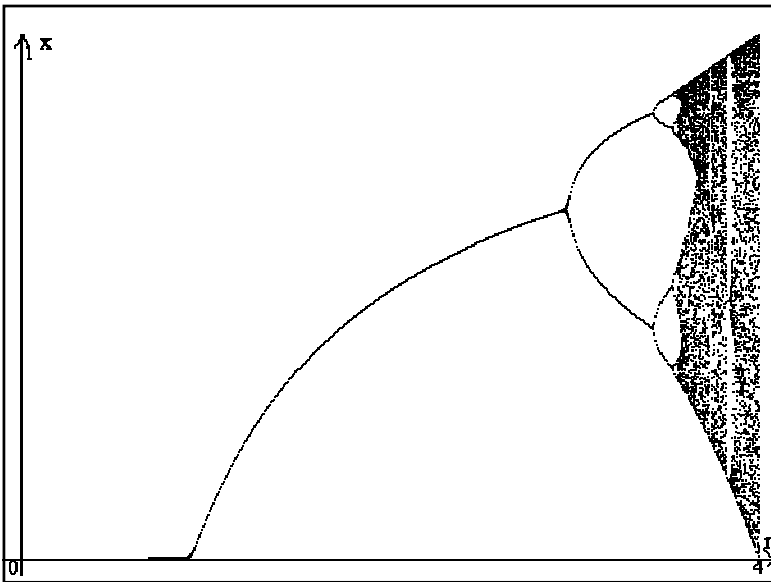
- Quand on fait varier le paramètre lié à la compétition pour les ressources, le comportement de la population évolue.
- Lorsque le paramètre est petit, la population croît vers son équilibre.
- Si la paramètre est plus grand, la population tend toujours vers un équilibre, mais en oscillant autour.



Premiers phénomènes d'alternance

- Quand le paramètre devient trop grand, la population n'atteint jamais un équilibre, mais peut en avoir plusieurs.
- Ainsi, en accroissant régulièrement le paramètre, on trouve des phénomènes avec cycle limite de période 2, de période 4 etc.





Phénomènes chaotiques ordinaires

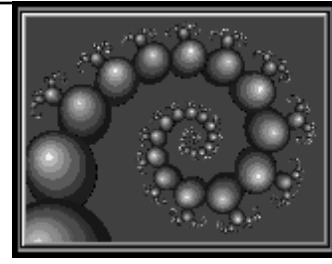
- Les mathématiques permettent de comprendre que les aspects irréguliers ou aléatoires du comportement d'une population animale sont partie intégrante de la situation et non pas des erreurs de mesure.
- Tout comme ces fluctuations de population, la formation des flocons de neige, la fréquence des éruptions volcaniques, la propagation des épidémies, les variations du climat, les irrégularités des battements cardiaques... tous ces phénomènes sont décrits par la théorie du chaos, une théorie qui cherche l'ordre dans le désordre - et le désordre dans l'ordre.

Vers le chaos ...

- Une analyse fine révèle que les rythmes cardiaques varient fortement, même au repos. Il peut varier de 40 à 80 battements par minute en quelques instants et jusqu'à 180 au cours d'une journée.
- Depuis 50 ans, les médecins pensaient que le rythme cardiaque retourne naturellement à un état stationnaire normal et donc qu'avec l'âge ou de la maladie, le corps est moins apte à maintenir un rythme constant au repos.
- Il n'en est rien. Les battements cardiaques suivent une courbe déchaquetée, irrégulière. Sa nature chaotique le rend plus adaptable aux aléas de la vie.
- Des stimulateurs cardiaques pourraient ainsi contrôler le rythme cardiaque des personnes malades, prévenir et traiter dès les prémices un accident cardiaque. Le problème actuel est de les rendre évolutifs et leur permettre de tenir compte de l'état de santé des malades.

... et les fractales

- L'itération de phénomènes quadratiques a conduit les mathématiciens à considérer de nouveaux objets, appelés fractales.
- Elles ont été introduites par Benoît Mandelbrojt et étudiées par de nombreux mathématiciens depuis. Citons Gaston Julia, Adrien Douady et Jean-Christophe Yoccoz (médaille Fields).



Les fractales en art



Les fractales en géographie

- Les fractales interviennent pour caractériser la forme d'une côte, d'une rivière.
- L'expansion urbaine est également sujette à l'analyse fractale, comme tout phénomène de croissance.

Les fractales dans la nature

- Les fractales sont utilisées pour décrire la distribution (par exemple selon la taille) de divers objets : les galaxies, les agglomérations urbaines, les langues parlées dans le monde, les gisements pétroliers.
- Fractales également la forme des fougères, des choux-fleurs, des nuages ...

Les fractales en médecine

- Comme on l'a vu, les fractales sont utilisées pour des modèles de croissance en permettant de modéliser les épidémies, l'évolution ou la complexité en biologie (mais aussi en écologie, en économie, en transport).
- La structure du poumon, avec toutes ses ramifications, est également un exemple de fractale. On peut aussi songer aux réseaux vasculaires.

D'Arcy Thompson (1870-1945)

- Dans la première moitié du XXème siècle le naturaliste écossais D'Arcy Thompson a écrit « *Sur la croissance et la forme* » et s'émerveille sur l'unité de la vie et la relation entre forme et fonction.
- Thompson est le continuateur d'un idéal grec déjà enraciné dans la pensée de Pythagore et de Platon.
- Cependant il n'accepte ni la doctrine de Pythagore d'après laquelle « *les choses sont des nombres* », ni la vision de Platon d'un « *royaume de nombres idéaux existant au-delà des corps physiques* ».
- Mais il partage avec eux l'idée que la solution des mystères du monde devrait être recherchée dans l'aspect géométrique du nombre et que la simplicité, la régularité, la symétrie, l'harmonie et la vérité sont associées.

Formes et mathématiques

- D'Arcy Thompson trouve l'unité dans la diversité grâce à des schémas mathématiques communs : spirale d'un coquille et croissance de cellules, rayures de zèbre etc.
- Ses idées n'ont été comprises et redécouvertes que plusieurs dizaines d'années plus tard et on peut dire que les idées du mathématicien René Thom (Médailles Fields) partent des mêmes bases.

Un exemple pour conclure

- L'acétylcholine est une molécule qui intervient dans la production de mouvements volontaires, via les neurones moteurs (c'est le premier neurotransmetteur connu, découvert en 1906).
- Cependant elle existe dans le corps du fœtus alors même que les neurones moteurs ne sont pas fonctionnels car non connectés aux muscles.
- Les chercheurs ont compris en 2000 l'influence de la molécule d'Acétylcholine sur le développement des neurones moteurs (in utero) : leur forme, leur longueur, la façon dont ils s'étalent.

Un espoir de la recherche ?

- On peut ainsi espérer s'attaquer à des maladies neuro-musculaires comme les myopathies.
- La découverte évoquée précédemment permet en effet de voir que ces maladies n'ont pas que des facteurs génétiques ... une idée chère à D'Arcy Thompson !