



## L'abstraction entre rêve et réalité

- Aussi loin qu'on puisse remonter, les hommes ont cherché à comprendre le monde; et leurs questionnements ont mélangé philosophie, géométrie, arithmétique.
- L'abstraction, née de leurs esprits, et le monde sensible se sont mutuellement nourris et enrichis.

## RÊVES DE CHERCHEURS

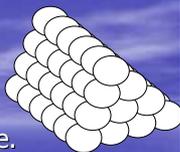
Quand les chiffres deviennent réalité

François Sauvageot

Université Paris 7

Maître de conférences en mathématiques - Animateur à l'IREM

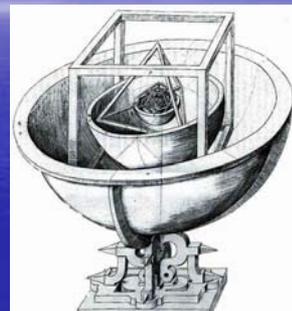
## La clef du monde



- Un terreau fertile est la voûte céleste.
- Et, en contemplant les cieux, Johannes Kepler, fondateur de l'astronomie nouvelle (*Astronomia Nova* 1609), se prend à rêver.
- Ses songes le mènent au rien, aux flocons de neige et aujourd'hui encore les questions qu'il a posées nourrissent la recherche. (Conjecture de Kepler 1611/1998)
- Mais surtout, par ses rêves, il questionne le créateur, il cherche la clef du « Mystère du monde ». (*Mysterium cosmographicum* 1596)

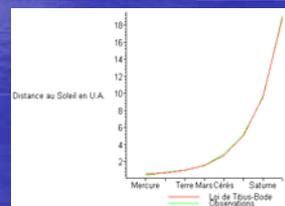
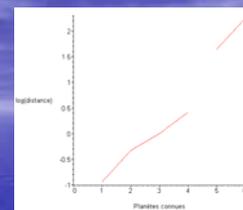
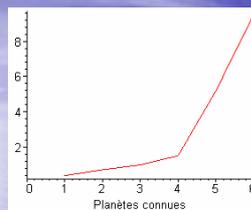
## Le Mystère du Monde

- Ce mystère est géométrique.
- Son centre est le Soleil.
- Il est composé des cinq solides platoniciens (polyèdres réguliers).



## Errances

- Ce n'était pas la clef. Kepler le comprit et formula (1609/1619) les trois lois qui permirent à Newton d'énoncer les Principes de la Philosophie Naturelle qui s'appliquent à la voûte céleste comme sur Terre ...
- A sa suite, Johann Titius de Wittenberg chercha à comprendre les distances du Soleil aux planètes. Grâce à ses calculs totalement empiriques on découvrit Uranus et Cérés (1781/1801).
- Le phénomène touché du doigt par Titius n'a été réellement compris qu'en 1994 par Bérengère Dubrulle et François Graner



## De la compréhension vers la prédiction, et retour

- 18/09/1846. En s'appuyant sur les écarts entre ce que devrait être la trajectoire d'Uranus et celle qui est observée, et en imaginant une planète qui se conformerait à la loi de Titius, Urbain Le Verrier prédit la position d'une huitième planète.
- 23/09/1846 : Neptune est observée conformément aux calculs de Le Verrier
- Le Verrier essaye d'expliquer les perturbations de la trajectoire de Mercure à l'aide d'une nouvelle planète ... en vain !
- 1917 : Albert Einstein explique ces perturbations grâce à sa théorie de la Relativité Générale !

## La réalité comme un rêve

- La vision géométrique et plus tard la vision quantifiée du monde ont démontré leur puissance de compréhension comme de prédiction.
- Et ce qui pouvait passer pour un rêve est devenu un instrument pour modeler la réalité.

## Mathématiques au quotidien

- Voici quelques exemples où les mathématiques sont présentes de façon plus ou moins discrète :
  - télécommunications
  - cartes bancaires
  - moteurs de recherche sur internet
  - sondages et plus généralement pourcentages
  - referendum

## Compréhension et prédiction

- Les indicateurs chiffrés sont là pour nous aider à comprendre des événements et sont perçus comme des informations (ou des vérités à dire) par les media.
- Les sondages sont utilisés comme outils de prédiction ou comme photographies de la population.
- Un moteur de recherche nous permet de trouver rapidement des informations sur presque tout.

## Entre simplicité et complexité

- Faut-il pour autant croire qu'on peut se contenter d'utiliser ces outils sans en connaître la complexité ?
- Faut-il être un expert pour espérer ne pas se laisser impressionner par les mathématiques sous-jacentes ?

## Les experts ...

- Ceux qui possèdent une culture scientifique, peut-être portés par le sentiment de pouvoir appréhender de façon plus rationnelle une problématique, peuvent se laisser piéger par ce qu'ils espèrent être un reflet approximatif de la réalité et qu'ils ne cherchent pas à réfuter.
- On peut ainsi, en toute sincérité, convaincre grâce à un argument qui se révèle en fait faux et entraîner des décisions désastreuses, ou plus simplement donner de fausses idées sur une réalité complexe.
- On peut aussi devenir expert en manipulation ...

## ... et les autres.



- Ceux qui au contraire sont réticents face à ces quantifications de « l'humain » sont parfois conduits à se résoudre à accepter ce que les médias appellent grossièrement des « chiffres » et peuvent alors passer du refus à la soumission totale, incapables de contester la validité de ces nombres, de les contrôler et d'appréhender ce qu'ils mesurent réellement.
- On peut aussi se dédouaner des décisions prises, en s'abritant derrière ces nombres obscurs mais inattaquables.
- Et comment résister à la manipulation ?

## Cartes bancaires

- Les cartes bancaires et la communication chiffrée sur internet fonctionnent à partir de codes mathématiques.
- On pense qu'il est impossible de casser ces codes.
- Pourtant on doit de temps à autre complexifier ces codes parce qu'ils deviennent à portée des ordinateurs les plus puissants.
- Le point essentiel ici est que les mathématiciens ne peuvent pas démontrer que les codes sont inviolables ; c'est là une limitation importante !

## Google

- A l'heure actuelle la transmission de l'information est presque instantanée notamment grâce aux moteurs de recherche comme Google.
- Google est devenu en moins de trois ans le moteur de recherche sur Internet le plus employé au monde (53% des requêtes mondiales, soit 200 millions par jour).
- Il est fondé sur l'algorithme suivant : une page est d'autant plus pertinente qu'elle est fréquemment citée par d'autres.
- Contrairement à ses concurrents il fonctionne donc de façon purement mathématiques et non par thématique.

## Les dangers de Google

- C'est justement ce qui le rend manipulable !
- Un slogan anti-guerre a été reformulé et effacé d'Internet par un expert en stratégie économique de Harvard en 42 jours. Il a juste proposé une autre définition que celle utilisée par Kofi Annan (expliquant qu'il y a deux superpuissances sur la planète : les Etats-Unis et l'opinion publique) et est devenu LA référence d'Internet, au point que la déclaration de Kofi Annan a quasiment disparu. (<http://www.uzine.net/article1960.html>)

## Sondages et pourcentages

- On se plaint assez régulièrement des sondages. Un exemple récent est donné par Arnold Schwarzenegger : pourtant crédité de 26% des intentions de vote, il a été élu gouverneur de la Californie avec 49% des voix.
- La vie quotidienne est chiffrée et tout se compte en « points ». Le CAC40 a perdu 2 points, l'indice des prix en a gagné 3. Tout est sujet à pourcentage.

## Mathématiques et justice

- Le sophisme du procureur est un paradoxe dont il faut se méfier dès que l'on manipule des probabilités.
- Il consiste à confondre « la probabilité qu'un événement survienne » avec « la probabilité d'innocence de l'accusé ».
- C'est sur des bases aussi absurdes que 258 personnes ont été accusées au Royaume-Uni pour infanticide : l'expert en pédiatrie arrivait à convaincre que la probabilité qu'une mort subite du nourrisson arrive deux fois de suite était égale à la probabilité d'innocence de la mère.
- Et de conclure qu'il y avait autant de chance pour cela que pour un outsider côté à 80 contre 1 de gagner 4 années de suite le Grand Prix National », soit 1/73 000 000. Sally Clark a passé 5 années en prison à cause de cet argument et il y a encore 54 femmes en prison sur les mêmes bases.

## Tests ADN

- Un autre exemple de ce sophisme : la probabilité pour que deux profils ADN soient identiques est environ de 1/10 000. Si maintenant, suite à une affaire de mœurs, on trouve un suspect dont le profil ADN est exactement celui trouvé sur la victime, doit-on en déduire qu'on n'a qu'une chance sur 10 000 de se tromper en l'accusant ?
- NON. Supposons que pour parvenir à trouver le suspect, on ait dû comparer le profil ADN trouvé sur la victime avec 20 000 profils (issus d'un fichier de la police scientifique). Avec la probabilité donnée, il y a en fait 86% de chances de trouver au moins un profil identique et il y a 27% de chances de trouver exactement un profil identique.

## L'honnête homme doit-il se garder des maths ?



- Doit-on laisser ainsi les nombres prendre prise sur nos vies ? Est-ce la meilleure façon de décider ?
- Les maths représentent-elle un danger ou est-ce leur utilisation et leur (in)compréhension ?
- Quelle est la limite de leur champ d'action ?
- En fait ce sont les maths qui permettent de limiter leur propre pertinence !

## Maths vs maths



- Pour contredire effectivement une information chiffrée, il faut comprendre plus que la simple arithmétique dont elle est issue : il faut savoir questionner, remettre en cause le raisonnement, voire même les postulats de base.
- Citons pour exemple cette phrase du grand mathématicien Henri Poincaré, à propos des calculs d'Alphonse Bertillon lors de l'affaire Dreyfus :  
**Aucune conclusion ne serait pour cela légitime, parce que l'application du calcul des probabilités aux sciences morales est comme l'a dit Auguste Comte, le scandale des mathématiques, parce que Laplace et Condorcet, qui calculaient bien, eux, sont arrivés à des résultats dénués de sens commun !**

## Google et la culture

- Ce qui pose le plus de problème, ce n'est pas la transmission de l'information mais son organisation, sa gestion.
- Être cultivé ne se résume pas à avoir une encyclopédie sous la main, fut-elle aussi rapide et accessible que Google : il faut savoir choisir les bonnes sources, savoir évaluer la pertinence des informations.
- Google ne remplacera pas un bon dictionnaire (et il ne le prétend pas) et pourtant certains l'utilisent ainsi ...

## Quelles maths pour la justice ?

- Une application simple de formules mathématiques montre par exemple que Sally Clark était innocente avec une probabilité élevée sans être certaine (2/3).
- Rien ne remplacera donc une véritable enquête : quand on n'a peu de renseignements sur une affaire, les statistiques n'éclairciront rien par magie !
- De même que si un test ADN est positif alors qu'il a été pratiqué sur quelqu'un qui a été reconnu par la victime ou des témoins, le test devient une information importante.
- A condition de faire confiance aux experts ... Aux Etats-Unis des erreurs de protocole pour ces tests ont conduit des centaines d'homme en prison.

## Rêver éveillé



- Après avoir apporté des limitations à leur propre pertinence, les mathématiques peuvent aussi donner des réponses !
- Il ne faut jamais refuser de questionner l'obtention d'une donnée chiffrée et arriver ainsi à cerner ce qu'elle veut dire, ce à quoi elle s'applique et ne pas se laisser emporter à croire à des choses qu'elle ne dit pas !

# Le Referendum

- On demande aux Français, par voie de referendum :
  - « Voulez-vous un régime présidentiel, un régime parlementaire ou un régime d'assemblée ? »
- Or parmi les 20 millions d'électeurs :
  - 9 millions préfèrent le présidentiel, accepteraient le parlementaire mais refusent celui d'assemblée ;
  - 5 millions préfèrent le parlementaire, accepteraient celui d'assemblée, mais refusent le présidentiel ;
  - 5 millions celui d'assemblée, accepteraient le présidentiel mais refusent le parlementaire.
- Que va-t-il se passer ? C'est le régime présidentiel qui va être plébiscité.
- Un peu plus tard, un homme politique influent parvient à faire poser dans un nouveau referendum la question suivante :
  - « Le peuple français est-il d'accord pour substituer le régime d'assemblée au régime présidentiel actuellement en vigueur ? »
- Quelle sera la réponse à la question ? Oui !
- Plus tard encore, un autre homme politique de poids fait organiser un troisième referendum sur le thème :
  - « Le peuple français préfère-t-il le régime parlementaire au régime d'assemblée ? »
- Quelle sera la réponse à cette nouvelle question ? Oui !
- On voit donc que le choix de la question est décisif ; c'est donc là que se situe l'acte politique crucial. Un homme politique a donc tout intérêt à bien choisir la question qu'il souhaite poser. Et le citoyen se doit de réfléchir non pas seulement à la question posée, mais aussi aux autres choix qu'il aurait pu estimer possibles ...**

# Ce qui n'est pas dit

- Les résultats d'une élection ne permettent pas de savoir en profondeur ce que pensent les électeurs, pas même de connaître leurs préférences relatives. Ce simple fait réserve de nombreuses surprises !
- Supposons que les électeurs se répartissent suivant le tableau suivant

Candidat	Autre choix	Pourcentage de voix
A	B	2%
B	C	33%
B	A	2%
C	B	33%
C	A	5%
C	B	20%

- De sorte que A sera gratifié de 40% des voix, contre 35% à B et 25% à C. S'il n'y a qu'un tour, c'est donc A qui l'emporte.
- Si maintenant on opère un second tour avec seulement deux candidats. Si A ou B se désistent, c'est C qui l'emporte avec 62% ou 58% des voix respectivement. Mais si C est C qui se désiste, alors c'est B qui l'emporte avec 53% des voix.
- On constate que le vainqueur du premier tour est sûr de perdre au second !
- On voit donc ici l'importance des stratégies de désistement. Le mode de scrutin actuel ne permet pas de connaître des détails comme ceux fournis dans le tableau précédent. Certains sondages peuvent néanmoins donner des indications ... s'ils sont maniés avec précaution.**

# Les pourcentages

- Un pourcentage mesure le rapport d'une partie à un tout. Si on change le « tout », on change le sens du pourcentage : comparer le « score » d'un candidat à deux élections différentes n'a pas de sens.
- Rappelons par exemple que le rapport entre le nombre de personnes ayant voté pour le Front National et le nombre d'inscrits est resté constant entre 1988, 1995 et 2002 : environ 11.5%.
- Pour cette élection, il est certainement plus judicieux de remarquer que Lionel Jospin a obtenu 7 097 786 voix en 1995 contre 4 610 749 en 2002.

# Mathématiques et médecine

- A partir d'un dosage sanguin est calculé un risque que l'enfant soit affecté d'une anomalie du chromosome 21. Si le risque est élevé une amniocentèse est proposée.
- Ce test est de nature statistique. Pour cette raison et pour éviter au maximum de ne pas détecter une trisomie 21, il faut accepter de proposer l'amniocentèse à de nombreuses femmes.
- Le seuil précis est en fait calculé sur la base du coût pour la sécurité sociale.

# Les risques cachés

- L'amniocentèse comporte des risques de fausse couche évalués à 1% environ.
- Sur les 860 000 tests pratiqués en 1997 et 1998, 60 000 ont été positifs et grâce à eux 700 trisomie 21 ont été détectées.
- Si la plupart s'en félicite puisque cela veut dire que 70% des trisomies ont été détectées, il me semble juste de remarquer que, si l'on croit au risque dû à l'amniocentèse, il y a donc, sur 860 000 grossesses testées, 700 trisomies 21 détectées, 300 trisomies 21 non détectées et 600 fausses couches ayant entraîné la mort d'un enfant sain.

Trisomie 21 détectée	Trisomie 21 non détectée	Mort d'un enfant sain
44%	19%	37%

# Mathématiques et pouvoir

- On pourrait probablement donner des milliers d'exemples illustrant les graves erreurs que commettent les medias et dont les conséquences sont lourdes, surtout quand elles se font le relais de manipulateurs.
- Mais pour conclure, je préfère citer Condorcet, à propos de la politique
  - « Nous voulons faire sentir toute l'importance et toute l'étendue d'une science [la politique] qu'on doit regarder encore comme presque nouvelle ; et qui ne peut faire de grands progrès qu'autant qu'elle sera cultivée par des hommes politiques qui joindront à une connaissance approfondie des sciences politiques, des talents pour la géométrie. »
- Il nous appartient à tous de veiller à cela !