# LES MATHEMATIQUES DU TRAFIC ROUTIER

## MODELE MICROSCOPIQUE

On considère une route à une seule voie, sans intersection. Les voitures sont repérées sur cette route par leur abscisse, que l'on notera $\boldsymbol{x}$. Cette position est un nombre réel, compris entre les abscisses correspondant au début et à la fin de la route.
On étudie également la vitesse d'une voiture, $\boldsymbol{v}$, qui n'est rien d'autre que la dérivée de $\boldsymbol{x}$ par rapport au temps. Cette vitesse est un nombre réel positif, majoré par une vitesse maximale.

Dans le modèle microscopique, on s'intéresse aux voitures en elles-mêmes et on essaie d'appliquer les lois de la mécanique newtonienne. Concrètement, on cherche

$$x_i(t) \in \mathbf{R},\ v_i(t) \in [0;v_m],\ i=1\ldots N$$

où $v_m$ est la vitesse maximale et $\boldsymbol{N}$ est le nombre de véhicules sur la route.

Il faut maintenant trouver des lois régissant le mouvement. Le modèle le plus simple est celui de la file indienne : on ne s'intéresse qu'aux interactions entre véhicules qui se suivent. Comme pour les lois de la mécanique newtonienne, l'interaction décrit l'accélération d'un véhicule en fonction de la situation. Cette accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, ou encore la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

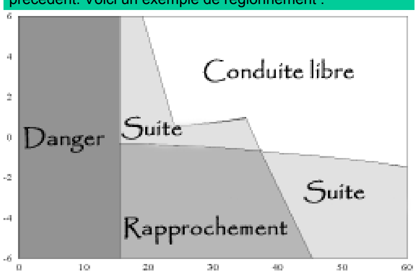
Un modèle couramment utilisé est

$$d^2x_i(t+T)/dt^2=a.v_i(t)^m[v_{i+1}-v_i]/[x_{i+1}-x_i]^n$$

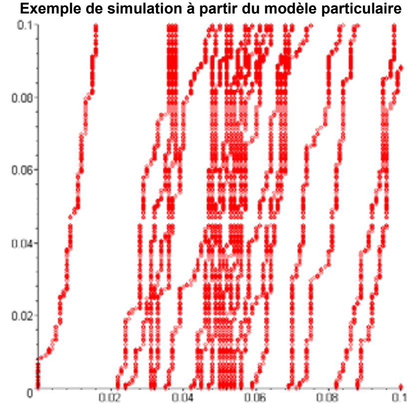
où T est le temps de réaction (**T≈0.45s**) et *a*,*m*,*n* sont des paramètres à ajuster.

Un raffinement tenant compte de facteurs psycho-physiologiques consiste à introduire des valeurs de seuil où le conducteur ajuste sa vitesse (selon une équation du format précédent).

Concrètement on délimite des régions dans un diagramme $v_{i+1}-v_i$ en fonction $x_{i+1}-x_i$. À l'intérieur des régions, la vitesse est constante (accélération nulle) et, en franchissant une frontière la vitesse est ajustée selon une équation du type précédent. Voici un exemple de régionnement :




**Exemple de simulation à partir du modèle particulaire**



## MODELE ALGORITHMIQUE

On pense aux voitures comme à des automates : si elles peuvent avancer, elles le font, sinon elles restent sur place. De même si elles peuvent accélérer, elles le font. Enfin si elles doivent ralentir pour ne pas heurter le véhicule qui les précède, elles le font instantanément.

Dans ce modèle, l'espace et le temps prennent un nombre fini de valeurs. On dit que l'on **discrétise** l'espace et le temps. En fait l'espace entre deux points successifs de la route est de l'ordre de la taille d'une voiture et les instants successifs sont espacés d'une durée de l'ordre du temps de réaction d'un conducteur.

Dans notre modèle $\boldsymbol{x}$ prend des valeurs entre 0 et M, c'est-à-dire que l'on peut mettre au plus M voitures sur la route, en les tassant. De façon similaire $\boldsymbol{v}$ prend des valeurs entre 0 et $v_m$.

Une description de l'état du trafic est donnée par une suite de points $[x_i,v_i]$ où $x_i$ et $v_i$ sont des entiers reflétant la position et la vitesse du véhicule $\boldsymbol{i}$. On suppose

$$0\leq x_i<x_{i+1}\leq M \qquad \text{et} \qquad 0\leq v_i\leq v_m$$

pour $\boldsymbol{i}$ allant de 1 à $\boldsymbol{N}$.

À chaque instant $t_k$ on applique l'algorithme suivant :
- Si $v_i\geq x_{i+1}-x_i$ alors $v_i$ devient $x_{i+1}-x_i-1$
- Si $v_i<x_{i+1}-x_i$ alors $v_i$ devient $v_i+1$, sauf si $v_i=v_m$
- Les véhicules avancent : $x_i$ devient $x_i+v_i$

Pour modéliser les temps de réaction, le freinage trop important et les fluctuations autour de la vitesse maximale, on peut rajouter une étape consistant à diminuer $v_i$ de 1 avec une probabilité $\boldsymbol{p}$ comprise strictement entre 0 et 1.

## MODELE PARTICULAIRE

Cette fois-ci les voitures sont comme des particules de gaz ou des molécules d'eau.

La description de ces objets est différente selon que l'on s'y intéresse au niveau des particules elles-mêmes ou dans leur ensemble.

Prenons le niveau particulaire : les voitures vont se comporter avec une nature probabiliste. Au bout d'un certain temps, elles décident que c'est à leur tour d'avancer et alors elles essaient de le faire. La différence avec le modèle algorithmique est que le temps est continu et que les véhicules ne progressent que d'une case à chaque fois.

Mathématiquement on ne s'intéresse plus à la vitesse, bien qu'on verra comment la retrouver ensuite. Ainsi on ne retient que les positions $x_i(t)$ : l'espace est toujours discret, mais le temps est continu.

Chaque conducteur avance, s'il en a la possibilité, d'une case après avoir attendu un temps aléatoire. Autrement dit on se donne des temps $T_i$ aléatoires (indépendants) correspondant au temps que va attendre la voiture $\boldsymbol{i}$ avant d'essayer d'avancer. La première à le faire est celle qui a tiré le plus petit temps d'attente !
Maintenant que le véhicule qui va essayer d'avancer est choisi, il regarde devant lui : s'il y a une case vide, il avance, sinon il reste sur place.
Ensuite on tire de nouveau au sort qui va essayer d'avancer.

Essayons de voir les choses à plus grande échelle.
On suppose, dans le modèle précédent, que $x_i(t)$ est un multiple entier de $\varepsilon$, et on fait tendre $\varepsilon$ vers 0, de sorte que le nombre de « sites » tend vers +∞.

La loi des grands nombres est un puissant outil issu de la théorie des probabilités et qui permet de décrire le comportement limite d'objets aléatoires. Ici elle permet de montrer que la répartition des $x_i(t)$ admet une limite, qui peut être interprétée comme la « densité » $\rho(x,t)$ de véhicules en un point $\boldsymbol{x}$ et au temps $\boldsymbol{t}$.

Ce genre d'interprétation « macroscopique » d'un phénomène microscopique est très présent en physique. Par exemple l'équation des gaz parfaits reliant la pression P, le volume V et la température T

$$\mathbf{PV=nRT}$$

n'est que le reflet d'une « agitation particulaire » que les mathématiciens appellent mouvement Brownien, du nom du botaniste Brown qui l'a découvert en observant des grains de pollen en suspension dans l'eau.

Il en va de même avec les fluides et, pour cette raison, on peut appliquer les méthodes de dynamique des fluides au trafic routier.

## MODELE MACROSCOPIQUE

On peut retrouver la limite hydrodynamique du modèle particulaire à partir du modèle microscopique.

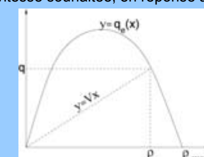
En comptant le nombre de voitures qui entrent et qui sortent d'un petit segment de route pendant un petit intervalle de temps, la conservation du nombre total de véhicules donne une relation entre
- la densité $\rho(x,t)$ (nombre de véhicules par unités de longueur)
- et le flux $q(x,t)$ (nombre de véhicules par unité de temps) au point $\boldsymbol{x}$ et au temps $\boldsymbol{t}$.

On a tout simplement $q(x,t) = \rho(x,t)\ v(x,t)$.

On cherche maintenant une relation entre flux et densité de la forme $q = q_e(\rho)$.

Cette relation explique comment les conducteurs ajustent leur vitesse ($q/\rho$) en fonction de la densité de trafic. En quelque sorte la route est « décrite » par cette fonction $q_e$, qui est donc une «caractéristique » du modèle et variera d'une route à l'autre.

Le graphe de $q_e$ est appelé « graphe fondamental ». La notation $q_e$ indique qu'on s'intéresse à une condition d'équilibre du trafic : comme on l'a vu lors de l'étude du modèle microscopique, cela suppose que toutes les voitures roulent à la vitesse souhaitée, en réponse à la densité du trafic.




Lors de la formation d'un bouchon, la queue du bouchon se propage à une vitesse égale à la pente reliant les points du diagramme fondamental attachés aux valeurs limites à gauche et à droite. Ainsi la vitesse de déplacement d'un véhicule soumis à une densité de trafic $\rho$=40 est 70km/h. Si maintenant $\rho$=100 sa vitesse sera 10km/h.
Sur le graphe fondamental, on voit que la vitesse de propagation du bouchon (la vitesse à laquelle recule la voiture indiquant qu'il y a un bouchon) est

$$\mathbf{(q_e(100)-q_e(40))/(100-40)=-30km/h}.$$